Weiterbildendes Studium Ingenieurmathematik – WS 98/99

Optimierung mit MATLAB

H.-J. Oberle, G. Opfer, S. Fredenhagen

Arbeitsblatt 12

1. Differentialgleichungen

In MATLAB gibt es verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Für nicht steife Differentialgleichungen gibt es `ode45` (explizites Runge-Kutta (4,5)), `ode23` (explizites Runge-Kutta (2,3)) und als Mehrschrittverfahren `ode113` (ein Adams-Bashforth-Moulton-PECE-Löser mit Ordnungssteuerung). Für steife Differentialgleichungen gibt es `ode15s` (Mehrstrittverfahren) und `ode23s` (Einschrittverfahren). Alle diese Verfahren haben den Aufruf

```
[T,Y,S] = Verfahren('F',tspan,y0,optionen,Parameter),
```

mit

`'F'`: Name der Funktion mit der rechten Seite der Differentialgleichungen, wird mit `F(t,y,flag,Parameter)` aufgerufen.

`tspan`: Integrationsintervall, z. B. `tspan` = $[\mathtt{t_0}, \mathtt{t_f}]$, oder mit Zwischenpunkten zum Zeichnen, z. B. `tspan=[0,1,2,3,4]`.

`y0`: Anfangsbedingungen, `y0` = $[\mathtt{y_1}(\mathtt{t_f}), \mathtt{y_2}(\mathtt{t_f}), ..., \mathtt{y_m}(\mathtt{t_f})]$.

`optionen`: Beeinflussen die Abbruchgenauigkeit des Verfahrens. Sie werden mit `odeset` und `odeget` verändert und abgefragt.

`Parameter`: Parameter für die Funktion `F`.

`T`: Spaltenvektor mit ausgewerteten Zeitpunkten.

`Y`: Lösungsmatrix. Jede Zeile y_i von `Y` enthält die zum Zeitpunkt t_i (Zeile von `T`) berechnete Lösung.

`S`: enthält Angaben zum Iterationsverlauf.

2. Das MATLAB-Programm `startawa.m`

Um das Zeichnen verschiedener Projektionen der Lösung einer Differentialgleichung zu vereinfachen, wurde für diese Vorlesung die Funktion

```
startawa('F',tspan,y0,'zeichenart', Koordinaten),
```

geschrieben. Die ersten drei Parameter haben dieselben Bedeutungen wie oben. Für die letzten beiden Parameter gilt:

`zeichenart='pfeile'`: Zur Lösungskurve wird auch das Richtungsfeld gezeichnet (nur für $m = 2$).

`zeichenart='holdon'`: Die Lösungskurve wird ohne Richtungsfeld in das aktive Zeichenfenster gezeichnet (nur für $m = 2$).

`zeichenart='ohne'`: Ohne Richtungsfeld wird die Lösungskurve als Projektion in das y_1-y_2-, das y_2-y_3-, ... und y_m-y_1-Koordinatensystem gezeichnet.

`zeichenart='nur'`: Es wird nur die Projektion der Lösungskurve in das y_i-y_j-Koordinatensystem mit `Koordinaten`$= [i, j]$ gezeichnet.

`zeichenart='drei'`: Es wird die Lösungskurve im $\mathbb{R}^3$ gezeichnet.

`zeichenart='nurdrei'`: Es wird für `Koordinaten`$= [i, j, k]$ die Lösungskurve (y_i, y_j, y_k) im $\mathbb{R}^3$ gezeichnet.

3. Aufgabe 12.1: Ein Räuber-Beute-Modell

Das Verhalten zweier Populationen, von denen eine als *Beute* die andere, den *Räuber*, nährt, kann man durch die beiden Differentialgleichungen

$$x' = x\left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{b+x}\right)$$
$$y' = y\left(e\frac{ax}{b+x} - d\right)$$

modellieren. Diese Differentialgleichungen sind in der Datei `raeuberbeute.m` mit den Parametern $r = 1,\ b = 1,\ d = 1,\ a = 4,\ e = 0.5,\ K = 0.8$ programmiert. Mit

```
>> startawa
```

bekommt man die Lösung dieses Differentialgleichungssystems für die Startdaten $x(0) = 0.2$ und $y(0) = 0.3$ und das Intervall `tspann` $= [0, 100]$ gezeichnet. Dieses entspricht der Eingabe

```
startawa('raeuberbeute',[0,100],[0.2,0.3],'pfeile').
```

Wählen Sie einen anderen Startpunkt, z. B. $(x(0), y(0)) = (0.8, 0.2)$. Dabei kann man mehrere Lösungen mit Hilfe der Parameters `zeichenart='holdon'` in ein Bild zeichnen lassen. Den Bildausschnitt kann man mit dem Befehl

```
axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
```

verändern. Variieren Sie den Parameter K. Wie sehen die berechneten Lösungen für $K = 2.5$ und $K = 3.5$ und den Startpunkt $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ aus.

4. Aufgabe 12.2: Zwei einfache Differentialgleichungssysteme

Sehen Sie sich die Datei `raeuberbeute.m` an und programmieren Sie die beiden folgenden Differentialgleichungssysteme selbst.

a)
$$y_1' = 2(y_1 - y_1 y_2), \qquad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = -(y_2 - y_1 y_2), \qquad y_2(0) = 3, \qquad t_f = 2$$

b)
$$
\begin{aligned}
y_1' &= -y_2 - \frac{y_1 y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, && y_1(0)=3\\
y_2' &= y_1 - \frac{y_2 y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, && y_2(0)=0\\
y_3' &= \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, && y_3(0)=0, \qquad t_f = 5
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe 12.3: Das restringierte Drei-Körper Problem

Das restringierte Drei-Körper Problem wird durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben:

$$
\begin{aligned}
x'' &= x + 2y' - \mu'\frac{x+\mu}{A} - \mu\frac{x-\mu'}{B}, && x(0)=1.2, \quad x'(0)=0\\
y'' &= y - 2x' - \mu'\frac{y}{A} - \mu\frac{y}{B}, && y(0)=0, \quad y'(0)=-1.04935750983\\
A &= ((x+\mu)^2+y^2)^{3/2}, \qquad \mu = \frac{1}{82.45}\\
B &= ((x-\mu')^2+y^2)^{3/2}, \qquad \mu' = 1-\mu \qquad t_f = 6.19216933140
\end{aligned}
$$

Es ist in der Datei `dreikörper.m` programmiert. Dabei wurde das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umgewandelt. Sehen Sie sich die Datei `dreikörper.m` an. Dort finden Sie auch einen Tip für eine geeignete Wahl von `zeichenart`.

Die Lösung ist eine geschlossene Kurve, d.h. Anfangs- und Endpunkt liegen übereinander. Probieren Sie einmal die verschiedenen Differentialgleichungslöser aus und ändern Sie auch die Abbruchgenauigkeit. Beides geschieht in der Datei `startawa.m` (ziemlich in der Mitte des Programms).

6. Aufgabe 12.4: Das trudelnde Elektron

Die Bahn eines trudelnden Elektrons wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= x_3'B_2 - x_2'B_3, && x_1(0)=0.7, && x_1'(0)=0\\
x_2'' &= x_1'B_3 - x_3'B_1, && x_2(0)=0, && x_2'(0)=0.8\\
x_3'' &= x_2'B_1 - x_1'B_2, && x_3(0)=0, && x_3'(0)=0.6
\end{aligned}
$$

$$
B_1 = -3x_1x_3/r^5, \qquad B_2 = -3x_2x_3/r^5, \qquad B_3 = -(3x_3^2 - r^2)/r^5
$$

$$
r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad t_f = 50
$$

Dieses Differentialgleichungssystem steht in der Datei `elektron.m`. Auch dieses Problem muß mit einer großen Genauigkeit gerechnet werde, damit der Lösungsverlauf qualitativ richtig ist. Eine richtige Lösung kann man daran erkennen, daß das Elektron keine zwei Umdrehungen, um den Mittelpunkt des x_1-x_2-Koordinatensystems macht. Um dieses zu überprüfen, muß man den Parameter `zeichenart` und den Bildausschnitt (mit `axis`) geeignet wählen.