Lösungshinweise zu Aufgabe 2.1 und 2.2

zu Aufgabe 2.1:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2-1)^2 = x^2(y^2+x^2-2)+1$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(y^2+2x^2-2) \\ 2x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x=0, y \text{ beliebig} \\ y=0, x=\pm 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2+12x^2-4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Es kommen nur die Punkte (*) als lokale Maxima/Minima in Betracht. Hierfür gilt:

$$\nabla^2 f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit.} \quad \Longrightarrow \quad (\pm 1, 0) \text{ sind lokale Minima.}$$

Die Punkte $(\pm 1, 0)$ sind globale Minima, da $f(x,y) \geq 0$ und $f(\pm 1, 0) = 0$.

$$\nabla^2 f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y^2-4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (0,y) \text{ kein lokales Minimum,} & \text{falls } |y| < \sqrt{2} \\ (0,y) \text{ kein lokales Maximum,} & \text{falls } |y| < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Auf der y-Achse ist $f(0,y) \equiv 1$. Die Frage „$f(x,y) < 1$“ führt zu

$$f(x,y) < 1 \iff x^2+y^2 < 2 \wedge x \neq 0$$

$$f(x,y) = 1 \iff x^2+y^2 = 2 \vee x = 0.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Damit} & : & (0,y), |y| < \sqrt{2}: \quad \text{nicht striktes lokales Maxima} \\ & & (0,y), |y| > \sqrt{2}: \quad \text{nicht striktes lokales Minima} \\ & & (0, \pm\sqrt{2}): \qquad \text{Sattelpunkte} \end{array}$$

zu Aufgabe 2.1:

Eine direkte Übertragung ist nicht möglich, da der Algorithmus mit drei Punkten arbeitet, im Fall $n = 1$ jedoch nur „Intervalle" zur Verfügung stehen.

Startintervall: x_0, x_1
Bestimme $x_b \in \{x_0, x_1\}$ mit $f(x_b)$ minimal
$x_s \in \{x_0, x_1\}$ mit $f(x_s)$ maximal, $x_s \neq x_b$
Da es keine weiteren Punkte gibt, gilt $z_M = z_b$.

Reflexion: $x_p := x_b + \alpha(x_b - x_s)$; $\alpha = 1$

Fall (3.7) $(f(z_p) > f(z_b))$, Expansion:

$$\begin{array}{ll} x_E = x_b + \beta(x_p - x_b); & \beta = 2 \\ \text{Wenn } f(x_E) < f(x_p): & x_s := x_E, \\ \text{sonst:} & x_s := x_p. \end{array}$$

Fall (3.8) $(f(x_p) \leq f(x_b))$, Kontradiktion:

$$z_K := \begin{cases} x_b + \gamma(x_p - x_b), & \text{falls } z_p \text{ besser ist als } z_s \\ x_b + \gamma(x_s - x_b), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} z_s := z_K, & \text{falls } f(z_K) < f(z_s) \\ z_s := (1-\gamma)z_s + \gamma z_b & \text{sonst} \end{array}$$

Fall (3.9) tritt nicht auf, da es nur zwei Punkte gibt.

Für $\gamma = 0.5$ kann auf die letzte Abfrage verzichtet werde, im Fall $f(x_r) = f(x_s)$ und $\alpha = 1$ können Zyklen auftreten.

Beispiel: $f(x) = 2e^{-x} + x^2$

Iter.	x_0	$f(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	x_p	$f(x_p)$	x_E	$f(x_E)$	x_K	$f(x_K)$
0	-2	18.778	-1	6.4365	0	2.0000	1	1.7357	—	—
1	1	1.7357	-1	6.4365	3	9.0996	—	—	0	2.0000
2	1	1.7357	0	2.0000	2	4.2707	—	—	0.5	1.4631
3	1	1.7357	0.5	1.4631	0	2.0000	—	—	0.75	1.5072
4	0.75	1.5072	0.5	1.4631	0.25	1.6201	—	—	0.625	1.4611